



<p>Dérivation : Dérivabilité à droite à gauche</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est dérivable au point <math>x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R} \cdot \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R} \right)</math>  <math>\ell = f'(x_0)</math> s'appelle le nombre dérivé de <math>f</math> en <math>x_0</math>.</li> <li>• <math>f</math> est dérivable à droite de <math>x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R} \cdot \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right)</math>  <math>\ell_d = f'_d(x_0)</math> s'appelle le nombre dérivé à gauche de <math>f</math> en <math>x_0</math>.</li> <li>• <math>f</math> est dérivable à gauche de <math>x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g \in \mathbb{R} \cdot \left( \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_g \in \mathbb{R} \right)</math>  <math>\ell_g = f'_g(x_0)</math> s'appelle le nombre dérivé à gauche de <math>f</math> en <math>x_0</math>.</li> <li>• <math>f</math> est dérivable au point <math>x_0 \Leftrightarrow f</math> est dérivable à droite et à gauche et <math>f'_d(x_0) = f'_g(x_0)</math></li> </ul>	
<p>Interprétation géométrique du nombre dérivé <math>f'(x_0)</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f'(x_0)</math> est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe de <math>f</math> au point d'abscisse <math>x_0</math></li> <li>• équation de la tangente (T) au point d'abscisse <math>x_0</math> est : <b>(T): <math>y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)</math></b>.</li> <li>• Si <math>f'(x) = 0</math> alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisse.</li> <li>• La fonction <math>u(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)</math> s'appelle la fonction affine tangente à la courbe de <math>f</math> au voisinage de <math>x_0</math>.</li> <li>• La fonction <math>(x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)</math> est une approximation affine de la fonction <math>f</math> au voisinage de <math>x_0</math>. On écrit <math>f(x) \approx u(x)</math> au voisinage de <math>x_0</math>.</li> <li>• On pose <math>x = x_0 + h</math> on a <math>f(x_0 + h) \approx u(x_0 + h)</math> ou encore <math>f(x_0 + h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)</math></li> </ul>	
<p>Dérivabilité sur un intervalle</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est dérivable sur un intervalle ouvert <math>(I = ]a, b[) \Leftrightarrow</math> pour tout <math>x</math> de <math>I</math> <math>f</math> est dérivable en <math>x</math></li> <li>• <math>f</math> est dérivable sur <math>]a, b[ \Leftrightarrow f</math> est dérivable sur <math>]a, b[</math> et <math>f</math> est dérivable à droite de <math>a</math></li> <li>• <math>f</math> est dérivable sur <math>]a, b] \Leftrightarrow f</math> est dérivable sur <math>]a, b[</math> et <math>f</math> est dérivable à gauche de <math>b</math></li> <li>• <math>f</math> est dér. sur <math>[a, b] \Leftrightarrow f</math> est dérivable sur <math>]a, b[</math> et <math>f</math> est dérivable à droite de <math>a</math> et à gauche de <math>b</math></li> </ul>	
<p>La fonction dérivée</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La fonction définie par : <math>\forall x \in I</math> on a <math>x \mapsto f'(x)</math> s'appelle la fonction dérivée de <math>f</math> sur <math>I</math> on note <math>f'</math>.</li> <li>• La fonction dérivée de <math>f'</math> sur <math>I</math> s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2) on note <math>f''</math> ou <math>f^{(2)}</math>.</li> <li>• La fonction dérivée de <math>f^{(n)}</math> sur <math>I</math> s'appelle la fonction dérivée <math>(n+1)^{\text{ième}}</math> (dérivée d'ordre <math>n+1</math>) on note <math>(f^{(n)})'</math> ou <math>f^{(n+1)}</math></li> </ul>	
<p>Operations sur les fonctions dérivables</p>	$(f + g)' = f' + g'$	$(\alpha \times f)' = \alpha \times f'$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
	$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$ ; $n \in \mathbb{Z}^*$ ; $g(x) \neq 0$
	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ ; $(x \in I, g(x) \neq 0)$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$ ; $(x \in I, g(x) \neq 0)$



	<p><math>f</math> est dérivable en <math>x_0</math> et <math>g</math> est dérivable en <math>f(x_0)</math> alors la fonction <math>g \circ f</math> est dérivable en <math>x_0</math> et on a : <math>(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))</math></p>	
Applications de $(g \circ f)'(x)$	$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} ; x \in D_f, \text{ et } f(x) > 0$	$(\sin(ax+b))' = a \times \cos(ax+b) ; \text{ sur } \mathbb{R}$
	$(\tan(ax+b))' = a \times [1 + \tan^2(ax+b)]$ $= a \times \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$ $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$	$(\cos(ax+b))' = -a \times \sin(ax+b) ; \text{ sur } \mathbb{R}$
La fonction dérivée de la fonction réciproque	<p><math>f^{-1}</math> est la fonction réciproque de la fonction <math>f</math> ( avec <math>f</math> est continue et strictement monotone sur <math>I</math> et <math>f(I) = J</math> ). ( <math>(x_0 \in I) ; x_0 \mapsto f(x_0) = y_0 ; (y_0 \in J)</math> )</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>f</math> est dérivable en <math>x_0</math> et <math>f'(x_0) \neq 0</math> alors la fonction <math>f^{-1}</math> est dérivable en <math>f(x_0) = y_0</math>.</li> <li>• On a <math>(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}</math> ou <math>(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}</math>.</li> </ul>	
Applications	$g'(x) = (\sqrt[n]{x})' = \left( (x)^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} ; n \in \mathbb{N}^*$	$(\sqrt[n]{f(x)})' = \left( (f(x))^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$
	$g'(x) = (x^r)' = r x^{r-1} ; r \in \mathbb{Q}^*$	$([f(x)]^r)' = r \times f'(x) \times [f(x)]^{r-1} ; r \in \mathbb{Q}^*$
<b>Applications de la dérivation</b>		
La fonction dérivée $f'$	<b>Extremums</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est dérivable sur un intervalle ouvert <math>I</math> et <math>f</math> admet un extremum en <math>a \in I</math> alors <math>f'(a) = 0</math>.</li> <li>• <math>f</math> est dérivable sur un intervalle ouvert <math>I</math> et <math>f'(a) = 0</math> (<math>a \in I</math>) et <math>f'</math> change de signe au voisinage de <math>a</math> alors <math>f(a)</math> est un extremum de <math>f</math>.</li> </ul>
	<b>Monotonie de <math>f</math></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>\forall x \in I : f'(x) &gt; 0</math> ( même si <math>f'</math> s'annule en un nombre fini de points ) alors <math>f</math> est strictement croissante sur l'intervalle <math>I</math>.</li> <li>• Si <math>\forall x \in I : f'(x) &lt; 0</math> ( même si <math>f'</math> s'annule un nombre fini de point ) alors <math>f</math> est strictement décroissante sur l'intervalle <math>I</math>.</li> <li>• Si <math>\forall x \in I : f'(x) = 0</math> alors <math>f</math> est constante sur <math>I</math>.</li> </ul>
La fonction dérivée $f''$	<b>Position relative de la tangente et la courbe – la concavité</b>	$\forall x \in I : f''(x) > 0$ ( la fonction dérivée seconde ) alors : <ul style="list-style-type: none"> <li>• La courbe <math>(C_f)</math> de <math>f</math> est située au dessus des tangentes pour tout point <math>M(x_0, f(x_0))</math> tel que <math>x_0 \in I</math>.</li> <li>• Dans ce cas on dit que la courbe <math>(C_f)</math> de <math>f</math> est convexe ( ou sa concavité est dans le sens des ordonnées positives . on note  )</li> </ul>
		$\forall x \in I : f''(x) < 0$ ( la fonction dérivée seconde ) alors :

Points d'inflexions		<ul style="list-style-type: none"> <li>• La courbe <math>(C_f)</math> de <math>f</math> est située au dessous des tangentes pour tout point <math>M(x_0, f(x_0))</math> tel que <math>x_0 \in I</math>.</li> <li>• Dans ce cas on dit que la courbe <math>(C_f)</math> de <math>f</math> est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées négatives . on note )</li> </ul>
		<p>Si la fonction dérivée seconde <math>f''</math> s'annule en <math>x_0 \in I</math> ( <math>I</math> intervalle ouvert ) et <math>f''</math> change de signe au voisinage de <math>x_0</math> alors le point d'abscisse <math>A(x_0, f(x_0))</math> est un point d'inflexion au courbe <math>(C_f)</math> ; dans ce cas la tangente au point <math>A(x_0, f(x_0))</math> coupe ( ou traverse ) la courbe.</p>
Centre de symétrie de $(C_f)$		<p>Le point <math>I(a, b)</math> est centre de symétrie à la courbe <math>(C_f)</math> <math>\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}</math></p>
Axe de symétrie de $(C_f)$		<p>La droite d'équation <math>D: x = a</math> est un axe de symétrie à la courbe <math>(C_f)</math> <math>\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) = f(x) \end{cases}</math></p>
Domaine d'étude d'une fonction $f$	<p><math>f</math> est paire</p> <p><math>f</math> est impaire</p>	<p><math>f</math> est une fonction définie sur <math>D_f = I \cup I'</math> ( <math>I</math> et <math>I'</math> sont symétriques par rapport à <math>0</math> ( zéro ) avec <math>I</math> contient juste les nombres positifs .</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>f</math> est paire ou bien impaire il suffit d'étudier la monotonie de <math>f</math> sur <math>I</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Si <math>f</math> est paire : la fonction <math>f</math> a la même monotonie (même variations) sur <math>I</math> et <math>I'</math></li> <li>❖ Si <math>f</math> est impaire : la monotonie de <math>f</math> sur <math>I</math> et <math>I'</math> sont opposées .</li> <li>❖ donc il suffit d'étudier <math>f</math> sur <math>D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = I</math> (<math>D_E</math> est appelé ensemble d'étude de <math>f</math>)</li> </ul> </li> </ul>
	<p><math>f</math> est périodique</p>	<p><math>f</math> est périodique de période <math>P = T</math> son ensemble d'étude est <math>D_E = D_f \cap [a, a + T]</math> avec <math>a \in \mathbb{R}</math> .</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• On préfère <math>a = 0</math> ou bien <math>a = -\frac{T}{2}</math></li> <li>• On obtient : <math>D_E = D_f \cap [0, T]</math> ou bien : <math>D_E = D_f \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]</math></li> </ul>



Les branches infinies

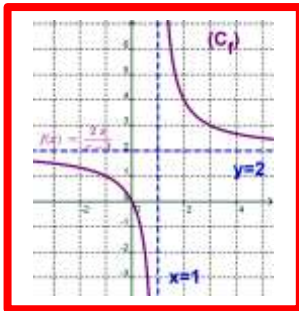
1<sup>er</sup> cas

Asymptote horizontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

$(C_f)$  admet une asymptote horizontale c'est la droite d'équation  $y = a$  au voisinage de  $\pm\infty$

Exemple : asymptote horizontale d'équation  $y = 2$  au voisinage de  $\pm\infty$

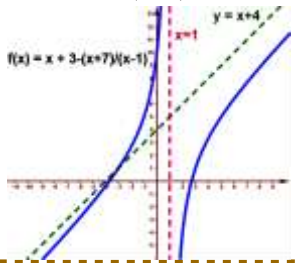


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

$(C_f)$  admet une asymptote oblique la droite d'équation  $y = ax + b$  au voisinage de  $\pm\infty$

Exemple  $f(x) = x + 3 - \frac{(x+7)}{(x-1)}$



Rq : position relative de  $(C_f)$  et  $(D)$  on étudie le signe de  $f(x) - (ax + b)$

3<sup>ème</sup> cas

Asymptote oblique et les trois cas particuliers

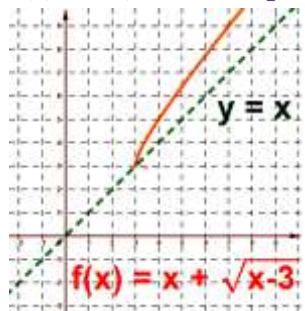
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$$

cas particulier 3 :  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b = \pm\infty$   
 $(C_f)$  admet une B.P.D la droite  $y = ax$  au voisinage de  $\pm\infty$

Exemple  $f(x) = x + \sqrt{x-3}$

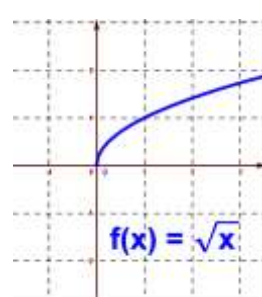


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

cas particulier 2 :  $a = 0$

$(C_f)$  admet une B.P.D l'axe des abscisses

Exemple  $f(x) = \sqrt{x}$



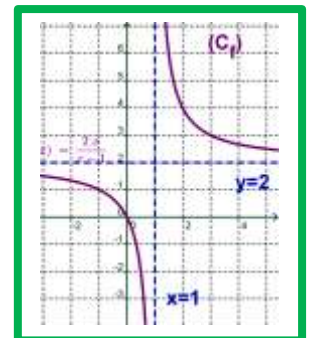
2<sup>ème</sup> cas

Asymptote verticale

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$$

$(C_f)$  admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation  $x = a$

Exemple : asymptote verticale d'équation  $x = 1$

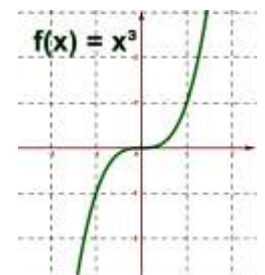


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

cas particulier 1 :  $a = \pm\infty$

$(C_f)$  admet une B.P.D l'axe des ordonnées

Exemple  $f(x) = x^3$



les cas particuliers ( Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction )